Wir behalten die Notation aus dem letzten Beispiel bei. Mit $\mathcal{K}$ bezeichnen wir das bezüglich der Erde ruhende Koordinatensystem, mit $\mathcal{K}'$ das Koordinatensystem des Zuges, der sich bzgl. $\mathcal{K}$ mit Geschwindigkeit $v = \frac{1}{2}c$ in positiver Richtung entlang der x-Achse bewegt. Die unendlich vielen Bahnhöfe sind im Abstand 1 entlang der x-Achse aufgereiht. Der n-te Bahnhof hat also die Ortskoordinaten $(n, 0)$ (wobei n die Menge $\mathbb{N}_0$ durchläuft). Mit s_n bezeichnen wir das Ereignis, dass der Zug den n-ten Bahnhof durchquert. Bezüglich $\mathcal{K}$ hat es die Raumzeit-Koordinaten $(n, 0, \frac{2n}{c})$. Die Bahnsteiguhr im n-ten Bahnhof zeigt also $t_n = \frac{2n}{c}$ an, wenn der Zug vorbeikommt. Dies wird auch auf dem Foto so festgehalten.

Aus dem letzten Beispiel wissen wir, wie man $\mathcal{K}$- in $\mathcal{K}'$-Koordinaten umrechnet und umgekehrt. Die Transformation von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$ geschieht durch die Matrix

$$T := \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{c}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}c} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad ,$$

die umgekehrte Transformation wird durch

$$U := \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{c}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}c} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad ,$$

geleistet. Die $\mathcal{K}'$-Koordinaten von s_n sind also gegeben durch

$$Ts_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{c}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}c} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ \frac{2n}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}n}{c} \end{pmatrix}.$$

Die Uhr des Bahnreisenden zeigt also $t'_n = \frac{\sqrt{3}n}{c}$, wenn er den n-ten Bahnhof durchquert. Es gilt $t'_n < t_n$, d.h. der Bahnreisende stellt fest (und dokumentiert durch ein Foto), dass seine eigene Uhr im Vergleich zur Bahnsteiguhr zurückliegt.

Auf den ersten Blick scheint sich die SRT hier selbst zu widersprechen. Die Bahnhöfe bewegen sich doch aus der Perspektive des Bahnreisenden mit Geschwindigkeit $\frac{c}{2}$ in negative x-Richtung, von daher sollten die Bahnsteiguhren gegenüber der Uhr des Reisenden nachgehen! Der Widerspruch löst sich auf, wenn wir berücksichtigen, dass der Reisende jedesmal auf eine *andere* Uhr schaut, wenn er sie mit seiner eigenen vergleicht. Konzentrieren wir uns auf die Uhr am 0-ten Bahnhof. Aus Sicht von $\mathcal{K}'$ hat sie zum Zeitpunkt $t'_n = \frac{\sqrt{3}n}{c}$ die Ortskoordinaten $(-\frac{\sqrt{3}}{2}n, 0)$, denn in der Zeitspanne zwischen 0 und t'_n hat sie die Strecke $t'_n v = (\frac{\sqrt{3}n}{c})\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}n$ in negativer x-Richtung zurückgelegt. Um herauszufinden, welche Zeit die Uhr am 0-ten Bahnsteig anzeigt, müssen wir von $\mathcal{K}'$- wieder in $\mathcal{K}$-Koordinaten umrechnen:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{c}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}c} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}n \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}n}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}\frac{n}{c} \end{pmatrix}$$

Die 0-te Bahnsteiguhr zeigt also $t = \frac{3}{2}\frac{n}{c}$, d.h. sie geht im Vergleich zur Uhr des Bahnreisenden nach, so wie man es im Rahmen der SRT erwartet.

Für das Verständnis ist es hilfreich, wenn wir einmal ausrechnen, welche Angabe auf jeder der Bahnsteiguhren zu sehen ist, wenn die Uhr des Reisenden eine beliebige Zeit $t \geq 0$ anzeigt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Position der n-ten Bahnsteiguhr $(\frac{1}{2}\sqrt{3}n, 0)$. Dabei berücksichtigen wir, dass dem Bahnreisenden auf Grund der Längenkontraktion die Abstände zwischen den Bahnhöfen verkürzt erscheinen. Zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt hat sie dann die Koordinaten $(\frac{1}{2}\sqrt{3}n - \frac{1}{2}ct, 0)$. Um zu berechnen, welche Zeit die n-te Bahnhofuhr anzeigt, rechnen wir wieder von $\mathcal{K}'$- in $\mathcal{K}$-Koordinaten um:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{c}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}c} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}n - \frac{1}{2}ct \\ 0 \\ t \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ \frac{n}{2c} + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$$

Wir halten folgende Beobachtungen fest:

1. *Jede* Bahnsteiguhr läuft aus Sicht des Reisenden langsamer als die eigene, und zwar um den (für alle Uhren einheitlichen) Faktor $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Zwischen der n-ten und der $(n+1)$-ten Bahnsteiguhr besteht jeweils ein Gangunterschied von $\frac{1}{2c}$. Dies bedeutet *nicht*, dass die n-te Bahnsteiguhr langsamer läuft als die $(n+1)$-te. Sie liegt nur um die konstante Zeitspanne von $\frac{1}{2c}$ hinter der $(n+1)$-ten zurück. Die Bahnsteiguhren, die vor dem Reisenden liegen, zeigen also spätere Zeiten an als die, die bereits hinter ihm liegen, aber die Ganggeschwindigkeit aller Bahnsteiguhren ist aus Perspektive des Reisenden dieselbe.

Für die anderen von Ihnen beschriebenen Situationen kann eine ähnliche Rechnung durchgeführt werden. Man kommt zu folgenden Ergebnissen:

- Fährt man mit dem Auto hinreichend schnell von Stuttgart Richtung Berlin, dann laufen die Uhren in *beiden* Städten scheinbar um denselben Faktor verlangsamt. Es besteht aber ein konstanter Gangunterschied zwischen beiden Uhren: Die Uhr in Berlin geht vor. Hält man an, dann laufen die Uhren wieder mit derselben Geschwindigkeit wie die eigene, und der Gangunterschied verschwindet.

- Schaut man vom Bahndamm in einen schnell fahrenden Zug, dann laufen die Uhren der Reisenden gegenüber der eigenen verlangsamt, und zwar um einen *einheitlichen* Faktor für alle Zugreisenden. Allerdings besteht zwischen den Uhren im vorderen und im hinteren Abteil ein konstanter Gangunterschied: Die Uhren im vorderen Abteil gehen (aus Sicht der Person am Bahndamm) gegenüber denen im hinteren vor.